

# ラジオシティ (Radiosity)

## 1 ラジオシティ法

### 1.1 ラジオシティ方程式の導出

レイトレーシング法を用いると、鏡面反射による映り込みなどの効果や、水、ガラスなどによる透過屈折効果をうまく表現することができる。しかしながら、(古典的な)レイトレーシングでは、拡散反射については shadow ray によってその寄与が計算されるのみであり、拡散反射体間で反射を繰り返した相互照明光の効果などを表現することができない。

ラジオシティ (radiosity) 法は、基本的には拡散反射体のみから成るシーンを仮定し、各オブジェクト間の光エネルギーの放射、反射に関する平衡状態の方程式を立て、これを解くことによりレンダリングを行う手法である。レイトレーシングが鏡面反射に起因するくっきりとした反射による画像を生成するのに対して、ラジオシティ法を用いると、拡散反射体相互の間接照明効果による、ぼんやりとした柔らかな印象の影 (ソフトシャドウ) などを表現することができる。

ラジオシティ法においては、シーンを構築するあらゆるオブジェクト表面は全て微小面要素の集合によって表現されていることを仮定する。これらの各面要素をパッチ (patch) と呼ぶ。ラジオシティ法においては、光源もシーンを構成する他のオブジェクトと同様に扱われ、有限の面積を持つオブジェクトとして定義する必要がある。

ラジオシティ (radiosity, 放射発散度) とは、ある点から放射される単位時間当たりのエネルギーの単位面積当たりの値のことである (単位は  $W/m^2$ )。

静的なシーンにおいては、各パッチが放射、反射するラジオシティがバランスした平衡状態にある。このとき、各パッチは拡散反射体であるので、他パッチから入射して来たエネルギーは、等方的にあらゆる方向に反射されて行く。いま、パッチ  $i$  のラジオシティを  $B_i$  とおき、パッチ  $i$  からの発光によるラジオシティを  $E_i$  とおく。また、 $\rho_i$  をパッチ  $i$  の拡散反射率として、 $F_{j-i}$  をパッチ  $j$  から出たエネルギーのうち、パッチ  $i$  に到達する分の割合、即ち、

$$F_{j-i} = \frac{\text{パッチ } j \text{ からパッチ } i \text{ に入射するエネルギー}}{\text{パッチ } j \text{ から放射されたエネルギー全体}}$$

とする。 $F_{j-i}$  はフォームファクタ (Form Factor) と呼ばれる。Form Factor はパッチ  $i$  と  $j$  間の位置関係、他パッチとの位置関係などの要因によって決まる。ラジオシティ  $B_i$  は、自らの発光による項  $E_i$  と、他パッチからの入射エネルギーを反射して得られる項の総和となる。

いま、パッチ  $j$  の面積を  $A_j$  とおくと、パッチ  $j$  から放射される単位時間当たりのエネルギーは

$$B_j A_j \tag{1}$$

となる。Form Factor の定義より、このうちパッチ  $i$  に到達するのは

$$B_j A_j F_{j-i} \tag{2}$$

であり、反射によりパッチ  $i$  から放射される分は

$$\rho_i B_j A_j F_{j-i} \quad (3)$$

となる。ラジオシティは単位時間当たり、単位面積当たりのエネルギーであるから、 $B_i$  はパッチ  $i$  の面積  $A_i$  で割って、拡散反射に起因する放射の寄与は以下のようなになる。

$$\rho_i B_j F_{j-i} \frac{A_j}{A_i} \quad (4)$$

以上をまとめると、以下のような平衡状態の方程式が得られる。

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^n B_j F_{j-i} \frac{A_j}{A_i} \quad (5)$$

## 1.2 Form Factor の性質

Form Factor については以下のような性質がある。

- $F_{ii}$   
 $F_{ii}$  はパッチ  $i$  から自分自身に到達するエネルギーの比となる。いまパッチは平面状 (または曲面であっても凸) とすると、自分自身から出た光が到達することはないから、平面パッチの場合  $F_{ii} = 0$  となる。
- エネルギー保存則  
いま、シーンを構築する環境中の全てのオブジェクトがパッチで表現されていることを仮定しているので、パッチ  $i$  から出たエネルギーは他のどこかのパッチに到達し、失われることはない。従って、どのパッチ  $i$  についても

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1 \quad (6)$$

が成り立つ。

- reciprocity  
もしパッチ  $i$  からパッチ  $j$  に光が到達できたとなると、これは逆にパッチ  $j$  からパッチ  $i$  へも光が到達できることを意味している。これにより、

パッチ  $i$  を発しパッチ  $j$  に到達する光の”数” = パッチ  $j$  を発しパッチ  $i$  に到達する光の”数”

が成り立つことが分かる。これにより、

$$A_i F_{i-j} = A_j F_{j-i} \quad (7)$$

が成り立つ。

## 2 ラジオシティ方程式の解法

Form Factor の性質 (7) とラジオシティの平衡の式 (5) により、以下の方程式を得る。

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^n B_j F_{i-j} \quad (8)$$

これは、未知数  $B_i$  に関する線形方程式であり、以下のように行列表現できる。

$$\begin{pmatrix} 1 - \rho_1 F_{1-1} & -\rho_1 F_{1-2} & \cdots & -\rho_1 F_{1-n} \\ -\rho_2 F_{2-1} & 1 - \rho_2 F_{2-2} & \cdots & -\rho_2 F_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n-1} & -\rho_n F_{n-2} & \cdots & 1 - \rho_n F_{n-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

この線形方程式を解くことにより、各パッチのラジオシティを求めレンダリングを実行できる。この線形方程式を解くためには Gauss-Seidel 法 (付録参照) などが用いられる。

Gauss-Seidel 法は線形方程式の解の近似値を反復更新していく手法である。いま、線形方程式が  $Ax = b$  と表されるとしたとき、係数行列  $A = (a_{ij})$  が次に示すような性質を持つ優対角行列であるとき Gauss-Seidel 法は収束することが知られている。

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (10)$$

ラジオシティ方程式 (9) の場合、

$$a_{ii} = 1 - \rho_i F_{i-i}$$

である。また、 $F_{i-j} \geq 0$  であり、式 (6) より、 $\sum_{j=1}^n F_{i-j} = 1$  が成り立つから、 $F_{i-j} \leq 1$  である。また、反射率の性質から  $0 \leq \rho_i < 1$  であるから、 $0 \leq \rho_i F_{i-i} < 1$  を得る。従って、

$$|a_{ii}| = |1 - \rho_i F_{i-i}| = 1 - \rho_i F_{i-i} \quad (11)$$

である。ここに (6) ( $1 = \sum_j F_{i-j}$ ) を代入し、 $\rho_i < 1$  を用いると

$$|a_{ii}| = \sum_{j=1}^n F_{i-j} - \rho_i F_{i-i} > \sum_{j=1}^n \rho_i F_{i-j} - \rho_i F_{i-i} = \sum_{j \neq i} \rho_i F_{i-j} \quad (12)$$

となる。

ラジオシティ方程式の場合、 $i \neq j$  のとき  $a_{ij} = -\rho_i F_{i-j}$  であるから、

$$|a_{ij}| = \rho_i F_{i-j} \quad (13)$$

が成り立つ。従って、(12)、(13) より、ラジオシティ方程式の場合の係数行列は優対角性を持ち、Gauss-Seidel 法で解を求めることができることが分かる。

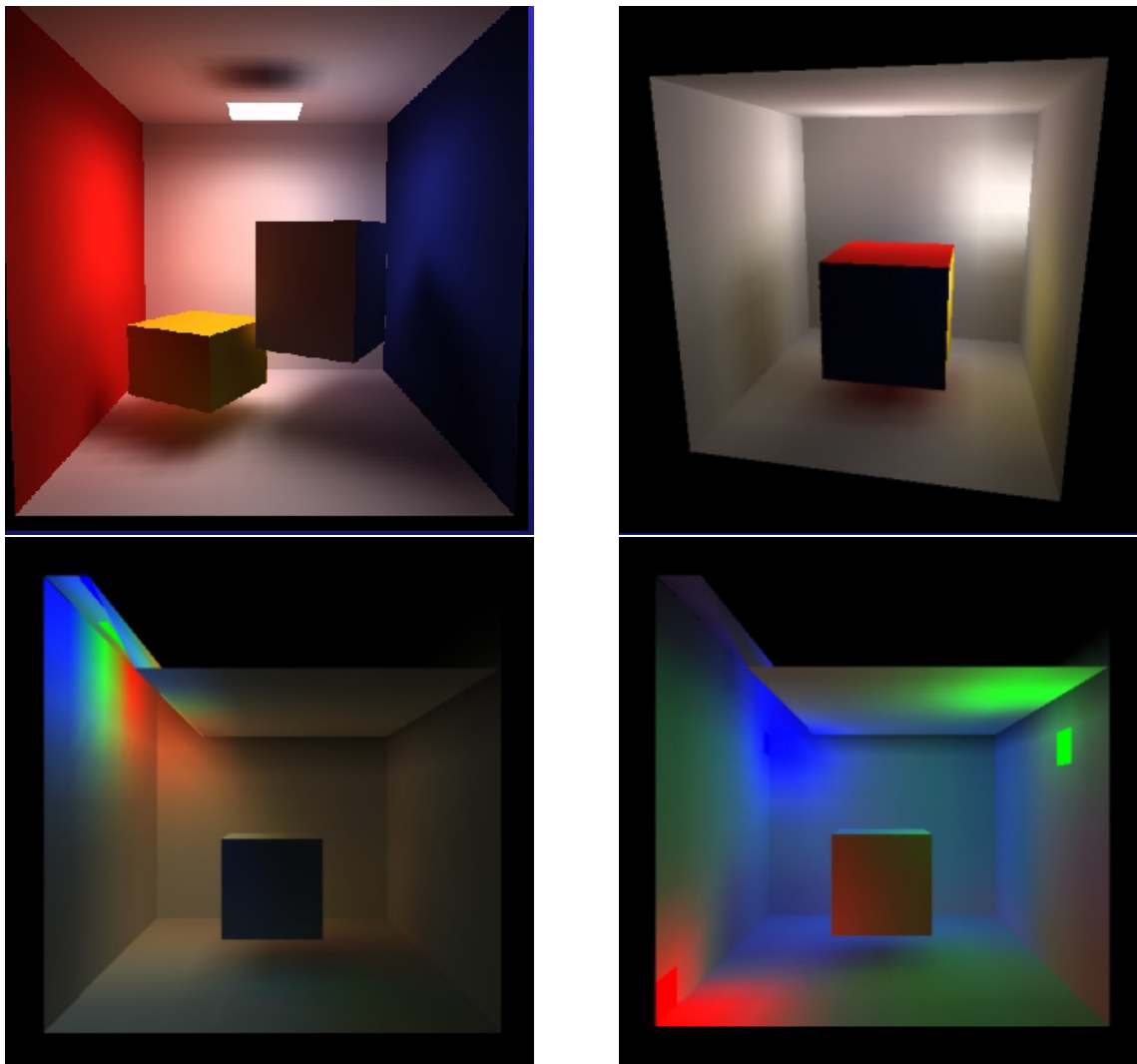


図 1: ラジオシティ法によるレンダリング例

### 3 Form Factor の計算法

ラジオシティ方程式を解くためには発光オブジェクトである光源が発するラジオシティ値を与えるとともに、Form Factor の値を与える必要がある。ラジオシティ法によってレンダリングを行う際に最も処理時間を要するのは、ラジオシティ方程式を解く部分ではなく、Form Factor を計算する部分である。以下では、Form Factor を実際に計算するために用いられている手法について紹介する。

#### 3.1 照明モデル

Form Factor の計算を行うために、ラジオシティ法の基礎となる照明モデルについてここでまとめておく [3]。ラジオシティ法においては、光のエネルギーの放射、反射に関する平衡状態を求める。単位時間あたりに放射される光のエネルギーを放射束 (radiant flux) という。エネルギーを  $Q$  と書くと、

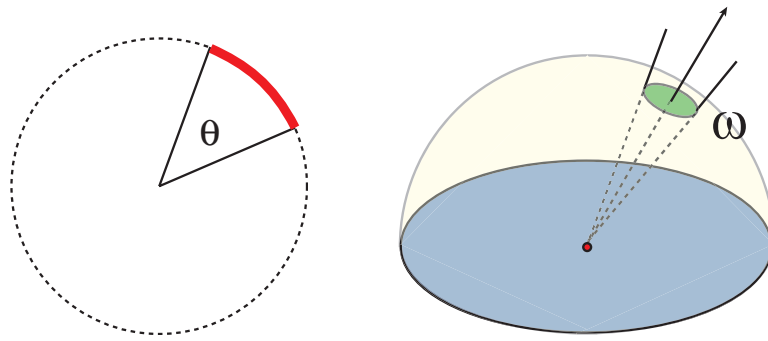


図 2: 角度 (2次元) と立体角 (3次元)

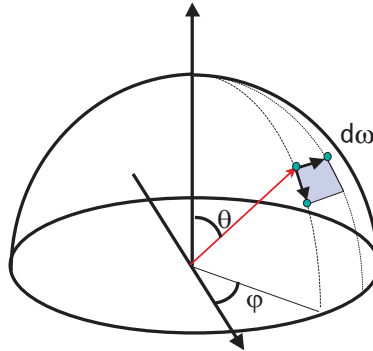


図 3: 立体角

放射束  $\Phi$  は

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (14)$$

と書ける。ラジオシティ (radiosity) とは、点  $x$  から出て行く放射束の単位面積当たりの値であり、面積 (area) を  $A$  と表すと、以下のように書ける。

$$B = \frac{d\Phi}{dA} \quad (15)$$

点  $x$  からは様々な方向にエネルギーが放射されるが、この方向性を考慮し、「ある方向に放射されるエネルギー」といった量を考えることにする。これは、2次元の場合であれば、いま考えている点からある方向の単位角度あたりどの程度のエネルギーが放射されるかを考えることに相当する。2次元の場合であれば、このエネルギーが放射される領域は、単位円上の弧の長さ (= 角度) で表すことができる。現在考えなければならないのは3次元空間中の問題であるので、2次元の場合の「一定角度範囲」という概念を拡張し、3次元の場合は、考えている (放射) 領域をその領域が単位球面上に作る面積で放射領域を測るものとする。この量を立体角 (solid angle) という。立体角を  $\omega$  で表す。

単位立体角当たりの放射束は放射強度 (radiant intensity) と呼ばれ、以下のように定義される。

$$I(\omega) = \frac{d\Phi}{d\omega} \quad (16)$$

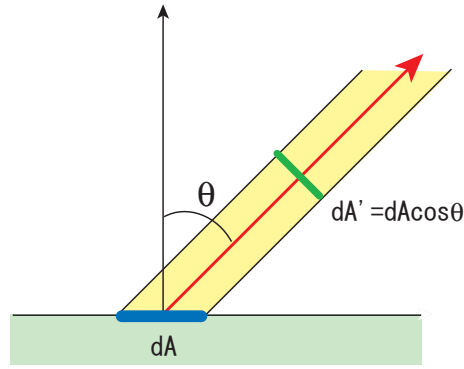


図 4: 進行方向に直交する面への射影

3次元空間中の方向は、単位球面上の点で表すことができる。いま球面座表系を用いてこの点を

$$\mathbf{X}(\theta, \phi) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)^T$$

と表す。このとき  $\theta, \phi$  と立体角の関係を調べてみよう。このために、いま  $\mathbf{X}(\theta, \phi)$  から  $\phi, \theta$  を微小変動させて出来る点  $\mathbf{X}(\theta, \phi + d\phi)$ ,  $\mathbf{X}(\theta + d\theta, \phi)$  を考え、微小変動を表すベクトルを

$$d\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(\theta, \phi + d\phi) - \mathbf{X}(\theta, \phi), \quad d\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(\theta + d\theta, \phi) - \mathbf{X}(\theta, \phi),$$

とおく。このとき生じる微小立体角を  $d\omega$  とすると、 $d\omega = |d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2|$  であるから以下の関係式を得る。

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (17)$$

放射強度は一定の方向に (単位立体角当たり) 放射される光の量である。この量が同じであっても、狭い面積に光が集中していた方が物体は明るく見える。従って、物体表面の明るさを記述するためには、放射強度では不適切で、放射強度の面密度を考える必要がある。この量は、エネルギーを放射している面  $dA$  を光の進行方向と直交する方向と直交する面へ正射影してその面積  $dA'$  を求め、放射強度をこの面積によって割ることで得ることができる。この量は放射輝度 (radiance)  $L$  と呼ばれ、レンダリングを行う際には重要な量である。いま、面の法線と光線の進行方向のなす角度を  $\theta$  とすると  $dA' = dA \cos \theta$  であるから (図 4 参照)、放射輝度は以下のようになる。

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{d^2\Phi}{\cos \theta dA d\omega} \quad (18)$$

これは radiosity  $B$  を用いると以下のようにも表すことができる。

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{dB}{\cos \theta d\omega} \quad (19)$$

従って、いま考えている点を中心とする単位半球を  $\Omega$  とすると、

$$B(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \cos \theta d\omega \quad (20)$$

ラジオシティ法においては、考えている物体は全て拡散反射体であり、どの方向から見ても放射輝度は等しい、即ち、次式が成り立つ。

$$L(\mathbf{x}, \theta, \phi) = L(\mathbf{x})$$

したがって (20) より、

$$B(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \cos \theta d\omega \quad (21)$$

ここに (17) を代入すると、

$$B(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi L(\mathbf{x}) \quad (22)$$

となる。これにより、ラジオシティ  $B$  から放射輝度  $L$  は

$$L = \frac{1}{\pi} B \quad (23)$$

によって求めることができる。

### 3.2 Form Factor

いま、パッチ内のラジオシティは一定であるとする。パッチ  $j$  内の微小領域  $dA_j$  からのパッチ  $i$  の微小領域  $dA_i$  へのエネルギーの伝播を考える。簡単のために、いま  $dA_i$  と  $dA_j$  の間を遮る他のパッチは存在しないものとする。パッチ  $dA_j$  から放射されるエネルギーの総和はパッチ  $j$  のラジオシティを  $B_j$  とおくと

$$B_j dA_j \quad (24)$$

である。このうち、ある方向、範囲のものだけが  $dA_i$  に到達する。 $dA_i$  に到達する分のエネルギーのラジオシティを  $dB_j$  とおく。 $dA_i$  に到達する光エネルギーが放射される光と法線がなす角度を  $\theta_j$  とし、その立体角を  $d\omega_j$  とおくと、 $dB = L \cos \theta d\omega$  だから、次のようになる。

$$dB_j dA_j = L_j \cos \theta_j d\omega dA_j \quad (25)$$

この立体角  $d\omega$  は、パッチ  $i$  上においては  $dA_i$  の領域を占める。この光線とパッチ  $i$  の法線とのなす角を  $\theta_i$  とし、 $dA_i$ ,  $dA_j$  間の距離を  $r$ 、光線進行方向と直交する面への  $dA_i$  の射影を  $dA'_i$  とおくと

$$dA'_i = dA_i \cos \theta = r^2 d\omega$$

だから、

$$d\omega = \frac{1}{r^2} \cos \theta_i dA_i \quad (26)$$

(25)、(26) より、微小領域  $dA_j$  から  $dA_i$  に到達する (単位時間当たりの) エネルギーは次のように表すことができる。

$$dB_j dA_j = \frac{L_j \cos \theta_j \cos \theta_i dA_j dA_i}{r^2} \quad (27)$$

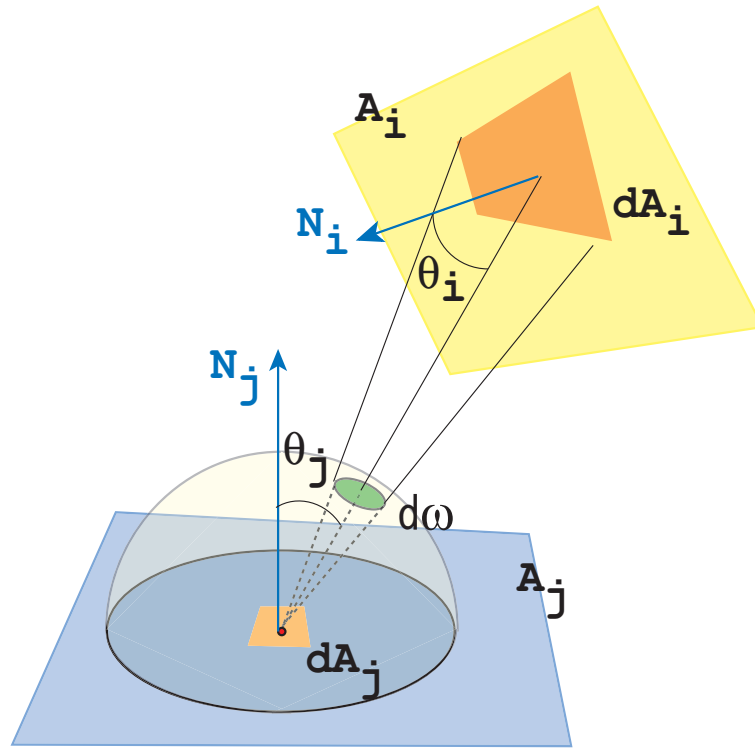


図 5: 微小パッチ間の Form Factor

従って、微小領域  $dA_j$ ,  $dA_i$  間の Form Factor は、

$$F_{dA_j-dA_i} = \frac{dB_j dA_j}{B_j dA_j} = \frac{L_j \cos \theta_j \cos \theta_i dA_j dA_i}{r^2} \frac{1}{B_j dA_j}$$

$B_j = \pi L_j$  であるからこれを代入すると、

$$F_{dA_j-dA_i} = \frac{\cos \theta_j \cos \theta_i dA_i}{\pi r^2} \quad (28)$$

パッチ  $dA_j$  からパッチ  $i(A_i)$  全体に入射するエネルギーを考えると、 $F_{dA_j-A_i}$  は以下の積分で表すことができる。

$$F_{dA_j-A_i} = \int_{A_i} \frac{\cos \theta_j \cos \theta_i}{\pi r^2} dx_i \quad (29)$$

これをパッチ  $A_j$  全域に渡って積分し、面積  $A_j$  で割ったものが  $F_{j-i}$  であると考えられるから、パッチ間の Form Factor は以下で与えられる。

$$F_{j-i} = \frac{1}{A_j} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_j \cos \theta_i}{\pi r^2} dx_i dx_j \quad (30)$$

但し、これはパッチ  $i$  全体がパッチ  $j$  から可視である (逆も成り立つ) ことを仮定した場合の Form Factor である。実際には両者の間に障害物 (他のパッチ) が存在する場合はエネルギーの寄与はなく



なるので、パッチ  $i$  上の点  $\mathbf{x}_i$  とパッチ  $j$  上の点  $\mathbf{x}_j$  が可視であるときに 1、他は 0 となるような関数  $V(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  を用いて、Form Factor は以下のように書ける。

$$F_{j-i} = \frac{1}{A_j} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_j \cos \theta_i}{\pi r^2} V(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_i d\mathbf{x}_j \quad (31)$$

### 3.3 半球への射影に基づく Form Factor の計算

ラジオシティ法においては、パッチ上のどの点についても Form Factor は一定であると仮定する。あるパッチ  $i, j$  に関する Form Factor  $F_{j-i}$  を (31) の代わりに、パッチ  $j$  の中心の微小領域  $dA_j$  に関する Form Factor で全体の Form Factor を近似することを考える。これは、式 (29) より、パッチ  $i$  上の微小領域  $dA_i$  との間 Form Factor  $F_{dA_j-dA_i}$  を加算 (積分) して得られる。

式 (28) より、 $F_{dA_j-dA_i}$  は

$$F_{dA_j-dA_i} = \frac{\cos \theta_j \cos \theta_i}{\pi r^2} dA_i$$

で得られる。いま  $dA_i$  を入射光線と直交する方向に射影してできる領域の面積  $dA'_i$  は、入射光とパッチ  $i$  の法線とのなす角を  $\theta_i$  とすると前と同様にして

$$dA'_i = \cos \theta_i dA_i$$

である。これは  $dA_j$  から放射される単位球面上の領域 (立体角)  $d\omega$  とは

$$r^2 d\omega = dA'_i$$

という関係にあるから、

$$F_{dA_j-dA_i} = \frac{\cos \theta_j d\omega}{\pi}$$

である。単位半球面上の領域  $d\omega$  を半球の底面に射影してできる領域 (面積) を  $dS$  とおくと図 6 より

$$dS = \cos \theta_j d\omega$$

が成り立つ。以上をまとめると、

$$F_{dA_j-dA_i} = \frac{dS}{\pi} \quad (32)$$

が得られる。これをパッチ  $i$  全体に渡って加算 (積分) したものが Form Factor  $F_{j-i}$  の推定値となる。これは Form Factor  $F_{j-i}$  は、パッチ  $i$  をパッチ  $j$  の中心点に配置された単位半球面上に射影し、できる図形をさらに半球の底面に射影してできる領域の面積を計算することにより求められることを示している。

### 3.4 Hemi-Cube 法

Form Factor は、パッチ中心に単位半球を配置し、他パッチをその半球上に射影してできる領域に基づいて計算できることを示した。このとき、球面が微小領域に離散化、分割されていれば、各領域

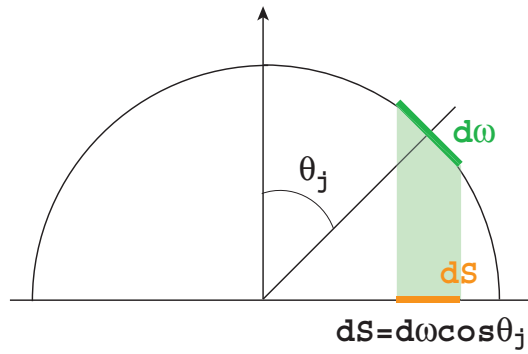


図 6: 半球への射影

に他パッチの像が投影されるか否かを判定し、各小領域毎に Form Factor への寄与を (28) に基づいて計算し、その総和として Form Factor の近似値を得ることができる。

このとき、パッチ中心に配置する立体は半球である必要はなく、半立方体 (立方体をパッチ中心に配置し、上半分だけを考慮するもの) を用いる Hemi-Cube 法などが Form Factor 計算にはよく用いられる。

このとき、(半)立方体の表面は同一面積を持つ小セルに分割されているものとする。Form Factor を計算するためには、各パッチをこれら上面、側面に射影し、射影された図形が載ったセルのみについて、Form Factor への寄与を加算していけばよい。図 7 に Hemi-Cube 法の概要を示す。他パッチが射影されるか否かにより、各セルは on または off の状態を持つものと考えることができる。Form Factor は on 状態のセルのみから求めることができる。

on 状態の各セルの Form Factor への寄与は (28) に基づいて求めることができる。いま、各セルの面積は全て等しく  $\Delta A$  であったとすると、各セルの寄与は

$$\Delta F = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} \Delta A \quad (33)$$

ここに、 $r$  はセル中心までの距離、 $\theta_j$  はセル中心に向けた方向ベクトルと (半)立方体が配置されている面の法線のなす角、 $\theta_i$  はセルに射影されたパッチの法線とのなす角である。

各セルからの寄与は、上面のセルと、側面のセルに分けて考えると次のようにできる (図 8 参照)。

- 半立方体上面のセル

いま、単位立方体が用いられているものとし、セル中心を原点とする座表系が図 8 のように設定されているものとする。このとき立方体上面は  $Z = 1$  となる。いま、この面に属し、 $(x_t, y_t, 1)^T$  を中心とするセルにパッチが射影されたとする。このとき、図 8 より、この場合式 (33) において  $\theta_i = \theta_j = \theta_t$  であり、

$$\cos \theta_t = \frac{1}{\sqrt{1 + x_t^2 + y_t^2}}$$

となるから、Form Factor への寄与は以下で与えられる。

$$\Delta F = \frac{\cos^2 \theta_t}{\pi r^2} \Delta A = \frac{\Delta A}{\pi(1 + x_t^2 + y_t^2)^2} \quad (34)$$

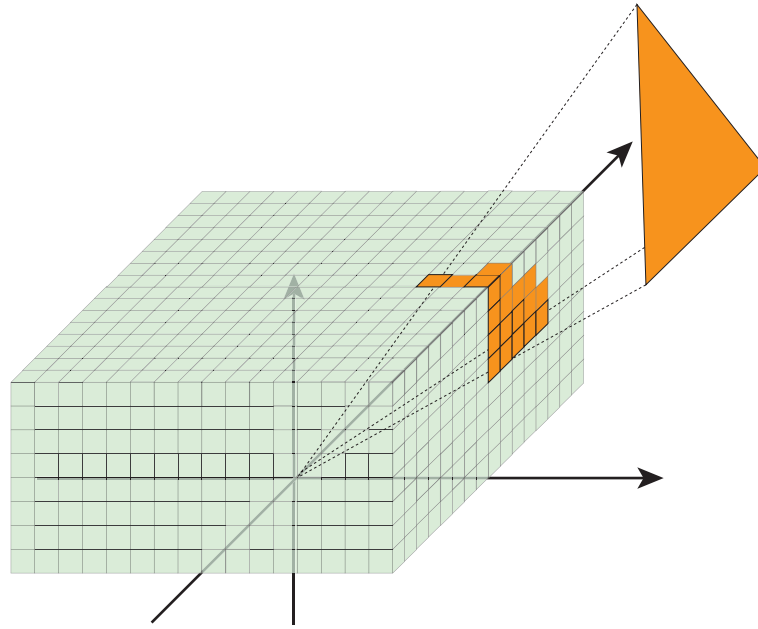


図 7: パッチから Hemi-Cube への射影

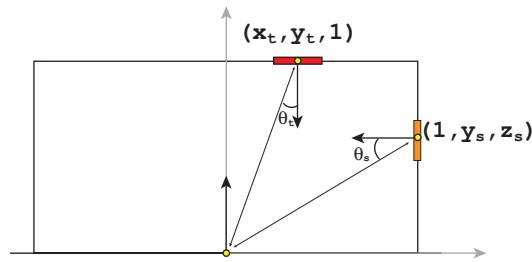


図 8: Hemi-Cube 法による Form Factor 計算

- 半立方体側面のセル

側面として  $X = 1$  に含まれるセルを考え、セル中心を  $(1, y_s, z_s)^T$  とする。この場合、図 8 より

$$\cos \theta_i = \cos \theta_s = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_s^2 + z_s^2}}$$

$$\cos \theta_j = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{1 + y_s^2 + z_s^2}}$$

となるから、Form Factor への寄与は以下で与えられる。

$$\Delta F = \frac{\cos \theta_j \cos \theta_s}{\pi r^2} \Delta A = \frac{z \Delta A}{\pi (1 + y_s^2 + z_s^2)^2} \quad (35)$$

可視判定も含め、実際にパッチが射影されるセルを計算するためには、半立方体の各面に投影画面を設定し、原点を中心としたパッチ集合の描画を行い、出来る図形のピクセル数を計算すればよい。

## 参考文献

- [1] J.D.Foley, A. van Dam, S.K.Feiner, and J.F.Hughes, “Computer Graphics : Principles and Practice 2nd Edition”, Addison-Wesley (1995).
- [2] D.Hearan and M.P.Baker, “Computer Graphics C Version 2nd Ed.”, Prentice Hall (1997).
- [3] H.W.Jensen 著, 苗村健訳, “フォトンマッピング”, オーム社 (2002).
- [4] F.X.Sillion and C.Puech, “Radiosity and global illumination”, Morgan Kauffmann (1994).

## A Gauss-Seidel 法

連立一次方程式  $Ax = b$  を解く問題を考える。係数行列  $A$  は、対角行列  $D$ 、対角要素は全て 0 であるような下三角行列  $L$ 、上三角行列  $U$  に分解できる。

$$A = L + D + U \quad (36)$$

さらに、 $K=D+L$ 、 $R=-U$  とおくと、 $Ax = b$  は

$$Kx = Rx + b \quad (37)$$

と変形できる。

いま、解の近似値  $x^{(k-1)}$  が与えられたとすると、 $K$  を係数行列とする次の方程式

$$Kx^{(k)} = Rx^{(k-1)} + b \quad (38)$$

を解くことにより、元の方程式の新しい近似解  $x^{(k)}$  が得られる。 $K=D+L$  より、

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (39)$$

となり、下三角であるから 1 番目 (1 行目) の方程式から順番に解くことができる。

これらをまとめると、 $Ax = b$  を解く Gauss-Seidel 法は以下のように書ける。

1. 初期値  $x^{(0)}$  を設定する。  
ラジオシティ方程式を解く場合  $x^{(0)} = \mathbf{E}$  という初期設定がよく用いられる。
2. 次の計算を  $i = 1, \dots, n$  について繰り返す。

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

3.  $k \leftarrow k + 1$  として 2 の処理を繰り返す。

このとき、 $\mathbf{x}^{(k)}$ 、 $\mathbf{x}^{(k-1)}$  の両方を記憶しておく必要はなく、2 により新しい値が与えられれば古い値は上書きして消してしまえばよい。

Gauss-Seidel 法は (38) より、次のような式に基づいて解の更新をしていく手法である。

$$\mathbf{x}^{(k)} = K^{-1}R\mathbf{x}^{(k-1)} + K^{-1}\mathbf{b} \quad (40)$$

これは次のように表すことができる。

$$\mathbf{x}^{(k)} = M\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \quad (41)$$

いま、真の解を  $\mathbf{x}$  とすると、これは  $\mathbf{x} = M\mathbf{x} + \mathbf{c}$  を満たす。したがって、以下が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} &= M(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}) \\ &= M^2(\mathbf{x}^{(k-2)} - \mathbf{x}) \\ &= M^k(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (42)$$

これは、 $\|M^k\| \rightarrow 0$  のとき、Gauss-Seidel 法は真の解に収束することを示している。Gauss-Seidel 法は線形方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  の係数行列  $A = (a_{ij})$  が次に示すような性質を持つ優対角行列であるとき収束することが知られている。

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (43)$$