

オンライン最適化入門

～スキーレンタル問題～

関西学院大学

藤原 洋志

発表概要

- オンライン最適化とは何かを、スキーレンタル問題を例に解説
- スキーレンタル問題に関する種々の研究

オンライン最適化とは？

- 将来の入力情報無しで如何に「出来るだけ良い解」を得るかという問題
 - 注意: ここで「オンライン」はネットワークに繋がっているという意味ではない
- 代表的なスキーレンタル問題を例に解説



スキーレンタル問題

なるべく安くスキーに行きたい!

レンタル	購入
1万円	5万円

- スキーに2回行く
→ 2回ともレンタルするのが最適
- スキーに7回行く
→ 初回に購入するのが最適
- 何回行くか分からない
→ ???



コスト表

何回目で購入するか

レンタル	購入
1万円	5万円

スキー回数

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	1	1	1	1	1	1	1
2	5	6	2	2	2	2	2	2
3	5	6	7	3	3	3	3	3
4	5	6	7	8	4	4	4	4
5	5	6	7	8	9	5	5	5
6	5	6	7	8	9	10	6	6
7	5	6	7	8	9	10	11	7
8	5	6	7	8	9	10	11	12

4回目で購入する戦略では...

3回目までレンタル

その後は購入したスキーを
使える

コスト表

何回目で購入するか

レンタル	購入
1万円	5万円

スキー回数

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	1	1	1	1	1	1	1
2	5	6	2	2	2	2	2	2
3	5	6	7	3	3	3	3	3
4	5	6	7	8	4	4	4	4
5	5	6	7	8	9	5	5	5
6	5	6	7	8	9	10	6	6
7	5	6	7	8	9	10	11	7
8	5	6	7	8	9	10	11	12

2回だと
分ければ
2回ともレンタル

7回だと
分ければ
初回で購入

コスト表

何回目で購入するか

レンタル	購入
1万円	5万円

スキー回数

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	1	1	1	1	1	1	1
2	5	6	2	2	2	2	2	2
3	5	6	7	3	3	3	3	3
4	5	6	7	8	4	4	4	4
5	5	6	7	8	9	5	5	5
6	5	6	7	8	9	10	6	6
7	5	6	7	8	9	10	11	7
8	5	6	7	8	9	10	11	12

何回行くか分からない場合
何を基準に最適化？



スキーレンタル問題の応用(1/2)

例:ハードディスクの消費電力
待機中の動作は...



- 停止
 - 消費電力ゼロ
 - そのかわり、再始動に大電力
- 回転
 - ずっと一定の電力が必要

購入

レンタル

スキーレンタル問題の応用(2/2)

	購入	レンタル
携帯電話等の 通信料	定額課金	時間制・ パケット課金
鉄道・バス運賃	定期券	通常の乗車券
トイレの照明	消灯	つけっぱなし
居酒屋	飲み放題	単品注文

オンライン最適化： 最悪競合比を基準とした最適化



最悪競合比基準では、
4回目までレンタルして5回
目に購入するのが最適



なぜ最適？
どういう意味で最適？

最悪競合比の考え方(1/2)

よくある話...



3万円で済んだはずが
7万円かかってしまった!

この比を小さくしましょう!

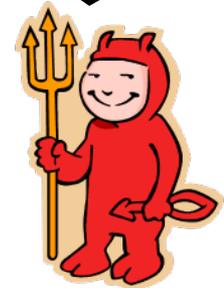
最悪競合比の考え方(2/2)

2回目までレンタル
3回目に購入



その後

3回でスキーを
やめさせる



レンタル	購入
1万円	5万円

悪魔を想定して戦略決定

上の戦略は $(2+5)/3=2.3$ 倍のコスト発生

これが最悪競合比 $:= \max[ALG/OPT]$

うまくやった場合とのコスト比の表

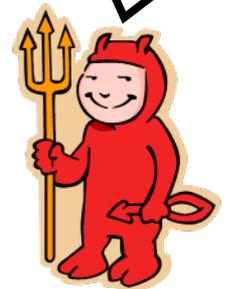
何回目で購入するか

スキー回数

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	1	1	1	1	1	1	1
2	2.5	3	1	1	1	1	1	1
3	1.7	2	2.3	1	1	1	1	1
4	1.3	1.5	1.8	2	1	1	1	1
5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	1	1	1
6	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.2
7	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	1.4
8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4

先程のコスト表とは異なる

コスト比が最大になるように選択
=最悪競合比



最悪競合比基準の最適戦略

何回目で購入するか

スキー回数

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	1	1	1	1	1	1	1
2	2.5	3	1	1	1	1	1	1
3	1.7	2	2.3	1	1	1	1	1
4	1.3	1.5	1.8	2	1	1	1	1
5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	1	1	1
6	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.2
7	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	1.4
8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4

最悪競合比が
最小となる
最適戦略



オンライン最適化： 最悪競合比を基準とした最適化



最悪競合比基準では、
4回目までレンタルして5回
目に購入するのが最適

最悪競合比 = 1.8

意味: どんな状況に対しても、うまくやった場合に対して1.8倍以下のコストで済む

スキーレンタル問題に 関する種々の研究

スキーレンタル問題に 関する種々の研究

- スキーレンタル問題
 - [Karlin et al. FOCS86] [Karp. WCC92]
- スキーヤー乱択モデル
 - [Karlin et al. SODA90]
- スキー回数乱択モデル
 - [藤原 et al. ISAAC02]
- マルチスロープスキーレンタル問題
 - 決定性 [Irani et al. DATE02]
 - スキーヤー乱択 [Lotker et al. STACS08]

スキーマー乱択モデル

スキーマー乱択モデル

スキーマー決定性 (先程のモデル)	例: 確率 1 で5回目に購入
スキーマー乱択	例: 確率 0.1 で 1 回目に購入 確率 0.2 で 2 回目に購入 確率 0.4 で 3 回目に購入 ... 

- スキーマーの戦略は乱択アルゴリズム
- 確率分布で戦略が決まる

スキーマー乱択モデルでの 最悪競合比の考え方



購入時期の
確率分布決定

確率分布を見て...

スキー回数を
選択



分布に従って
購入時期決定

その後

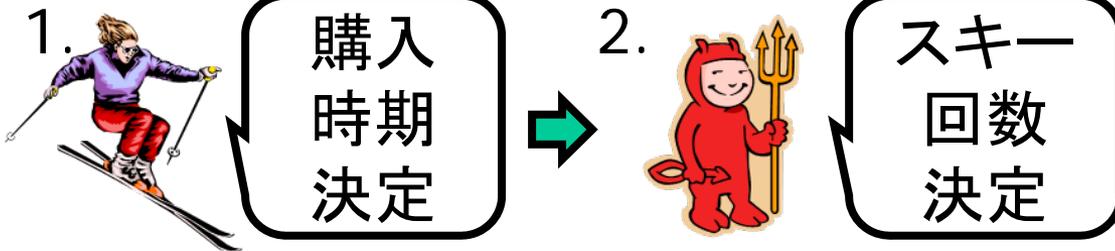
悪魔はスキーマーの確率分布を知っている
しかし実際にいつ購入するかは知らない

最悪競合比 := $\max E[RALG]/OPT$

モデル比較

スキーヤー決定性は後出しジャンケン：
悪魔強すぎ

スキーヤー決定性



スキーヤー乱択



スキーヤーは確率分布に従わなければならないが、
悪魔より後に戦略決定→相対的に悪魔弱める

うまくやった場合とのコスト比の表

例えばこんな分布

何回目で購入するかとその分布

最悪競合比

この戦略に対しては、
3回でやめさせる
→この戦略の最悪競合比
=2.2

		0	0.5	0.5	0	0	0	0	0	
		1	2	3	4	5	6	7	8	
スキー回数	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2.5	3	1	1	1	1	1	1	2
	3	1.7	2	2.3	1	1	1	1	1	2.2
	4	1.3	1.5	1.8	2	1	1	1	1	1.6
	5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	1	1	1	1.3
	6	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.2	1.3
	7	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	1.4	1.3
	8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	1.3



うまくやった場合とのコスト比の表

最適な分布

何回目で購入するかとその分布

スキーヤーが最適な分布を選ぶと、いつやめさせてもコスト比は同じ

スキー回数



	0.13	0.15	0.19	0.24	0.30	0	0	0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	5	1	1	1	1	1	1	1	1.5
2	2.5	3	1	1	1	1	1	1	1.5
3	1.7	2	2.3	1	1	1	1	1	1.5
4	1.3	1.5	1.8	2	1	1	1	1	1.5
5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	1	1	1	1.5
6	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.2	1.5
7	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	1.4	1.5
8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	1.5

最悪競合比が最小に

最適な分布は？

- 連続版では... (離散版と本質的差なし)

$$\frac{E_G[\text{ALG}(k, t)]}{\text{OPT}(t)} = \frac{1}{t} \cdot \left[\int_0^t (k+1)g(k)dk + \int_t^1 tg(k)dk \right].$$

より、分母を払って、

$$\int_0^t (k+1)g(k)dk + \int_t^1 tg(k)dk = ct.$$

両辺を t で微分して、

$$g(t) + \int_t^1 tg(k)dk = c.$$

更に両辺を t で微分して、

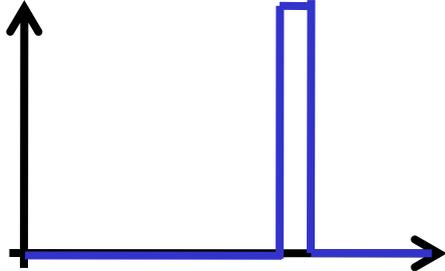
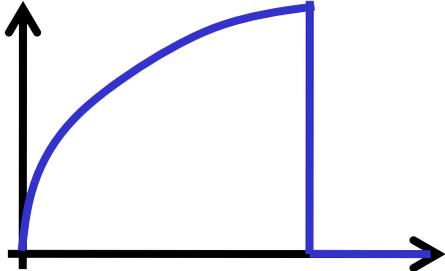
$$g'(t) - g(t) = 0.$$

定数を計算して、

$$g(k) = \begin{cases} \frac{e^k}{e-1} & 0 \leq k \leq 1; \\ 0, & 1 < k. \end{cases}$$

最適戦略の性能比較

(連続版)

モデル	最適戦略の最悪競合比
<p data-bbox="170 521 542 568">スキーヤー決定性</p> 	<p data-bbox="1329 668 1375 731">2</p>
<p data-bbox="170 875 494 922">スキーヤー乱択</p> 	$\frac{e}{e-1} = 1.58$

スキーヤーが有利

スキー回数乱択モデル

スキー回数乱択モデル

スキー回数決定性 (最初のモデル)	悪魔は最悪競合比が最大になるよう選ぶ
スキー回数乱択	例: 確率 0.1 でスキー回数 1 回 確率 0.2 でスキー回数 2 回 確率 0.2 でスキー回数 3 回 ... 

- 評価基準が変わってくる
 - 最悪競合比 $\max[\text{ALG}/\text{OPT}]$ でなく、
平均競合比 $E[\text{ALG}/\text{OPT}]$

平均競合比の考え方

確率分布を見て...



初回はレンタル
2回目に購入



スキー回数は
ある確率分布



その後



分布に従って
スキー回数決定

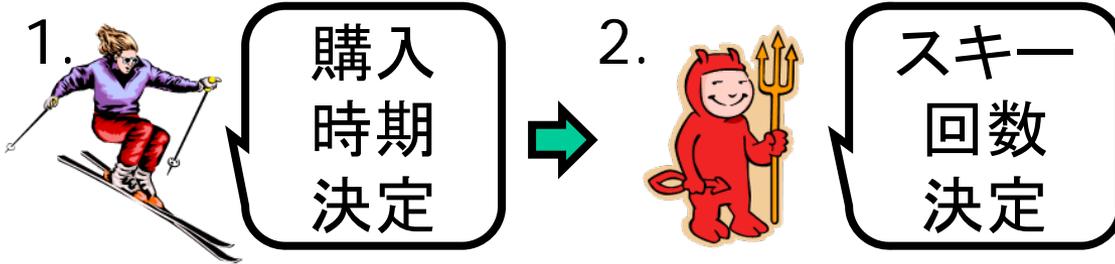


スキーヤーは悪魔の確率分布を知っている
しかし実際に何回になるかは知らない

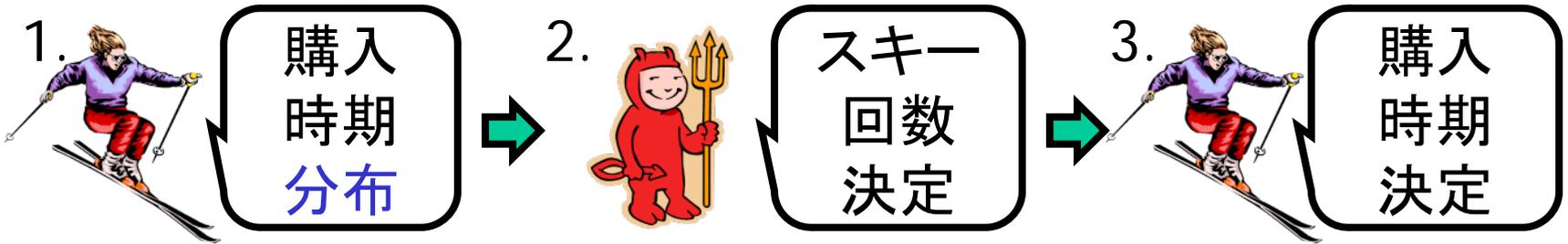
平均競合比 := $E[ALG/OPT]$

モデル比較

決定性



スキヤー乱択



スキー回数乱択



なぜ平均競合比を考えるのか？ →最悪競合比の評価限界

レンタル	購入
1万円	5万円

最悪競合比基準では
5回目に購入するのが最適



しかしレンタルに4万円も
払えということ!

他にも最悪競合比の評価限界を示す例：
ページングのアルゴリズム LRU と FWF は同じ値
悪魔が強すぎるのでは？ 少し予測を加えては？

スキー回数分布として 幾何分布を考えてみる

- スキー回数がちょうどt回である確率 =

$$p(1-p)^{t-1}$$

- 平均 = $\frac{1}{p}$

- 毎回、一定の確率でスキーをやめることを意味する

うまくやった場合とのコスト比の表

何回目で購入するか

確率	回数	1	2	3	4	5	6	7	8
0.099	1	5	1	1	1	1	1	1	1
0.088	2	2.5	3	1	1	1	1	1	1
0.078	3	1.7	2	2.3	1	1	1	1	1
0.069	4	1.3	1.5	1.8	2	1	1	1	1
0.062	5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	1	1	1
0.055	6	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.2
0.049	7	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	1.4
0.043	8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4
...
E[ALG/OPT]		1.49	1.29	1.27	1.29	1.33	1.38	1.43	1.46

スキー
回数は
幾何分布
(弱められた
悪魔)



平均競合
比が最小と
なる戦略



平均競合比

3つの基準

レンタル	購入
1万円	5万円

スキ一回数:
幾何分布

最悪競合比 $\max[\text{ALG}/\text{OPT}]$	平均競合比 $E[\text{ALG}/\text{OPT}]$	平均コスト $E[\text{ALG}]$
5回目に購入	5回目以前に購入 あるいは ずっとレンタル	初回に購入 あるいは ずっとレンタル

いわゆる期待値の最小化
とも異なることに注意

ちなみに両方乱択にすると...

$$E[E[RALG]/OPT]$$

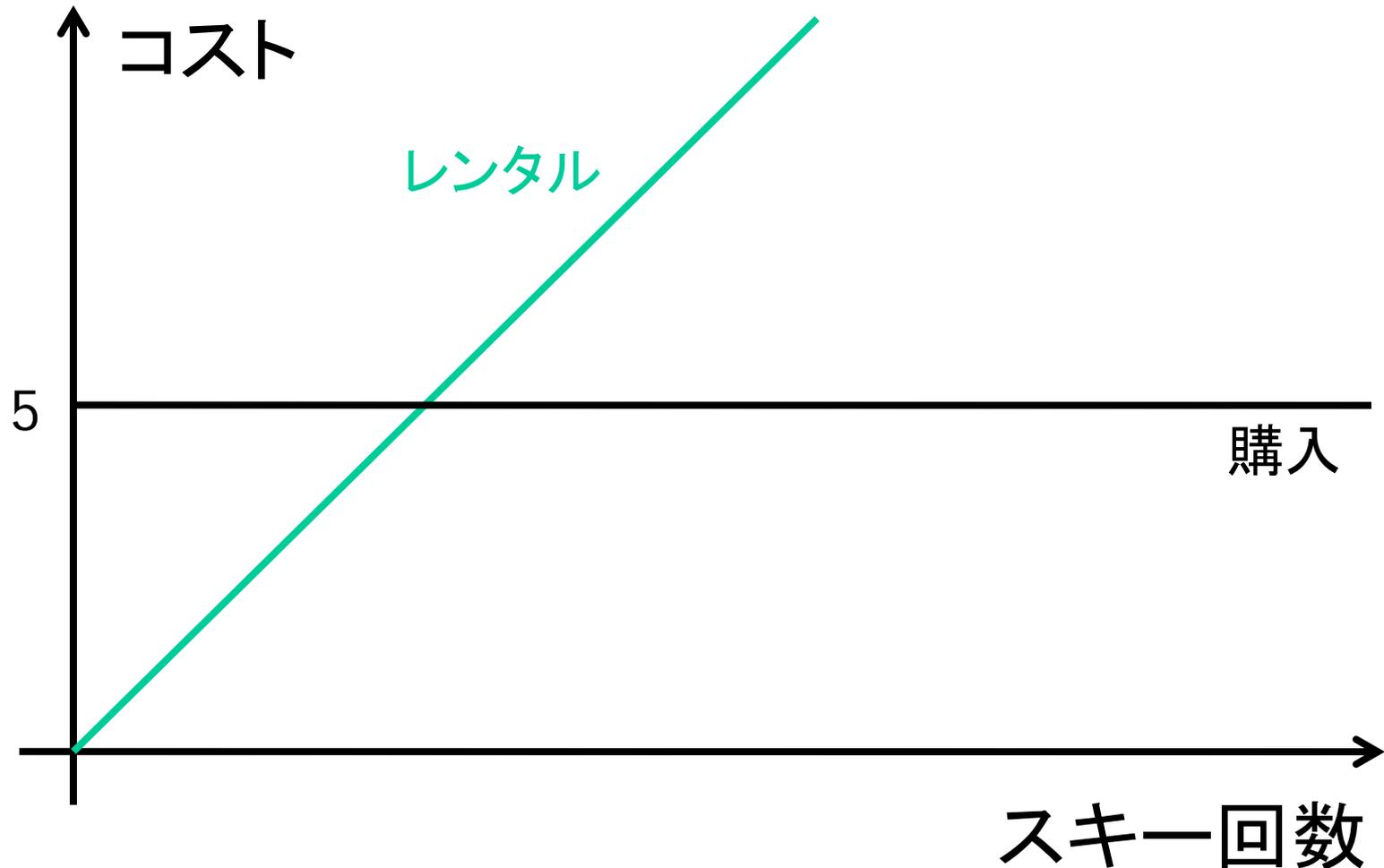
- スキーマー決定性、スキーマ回数乱択で考えるのと同じ
- つまり、決定性(あるタイミングで購入する確率が1)の戦略しか出てこない

マルチスロープ スキーレンタル問題

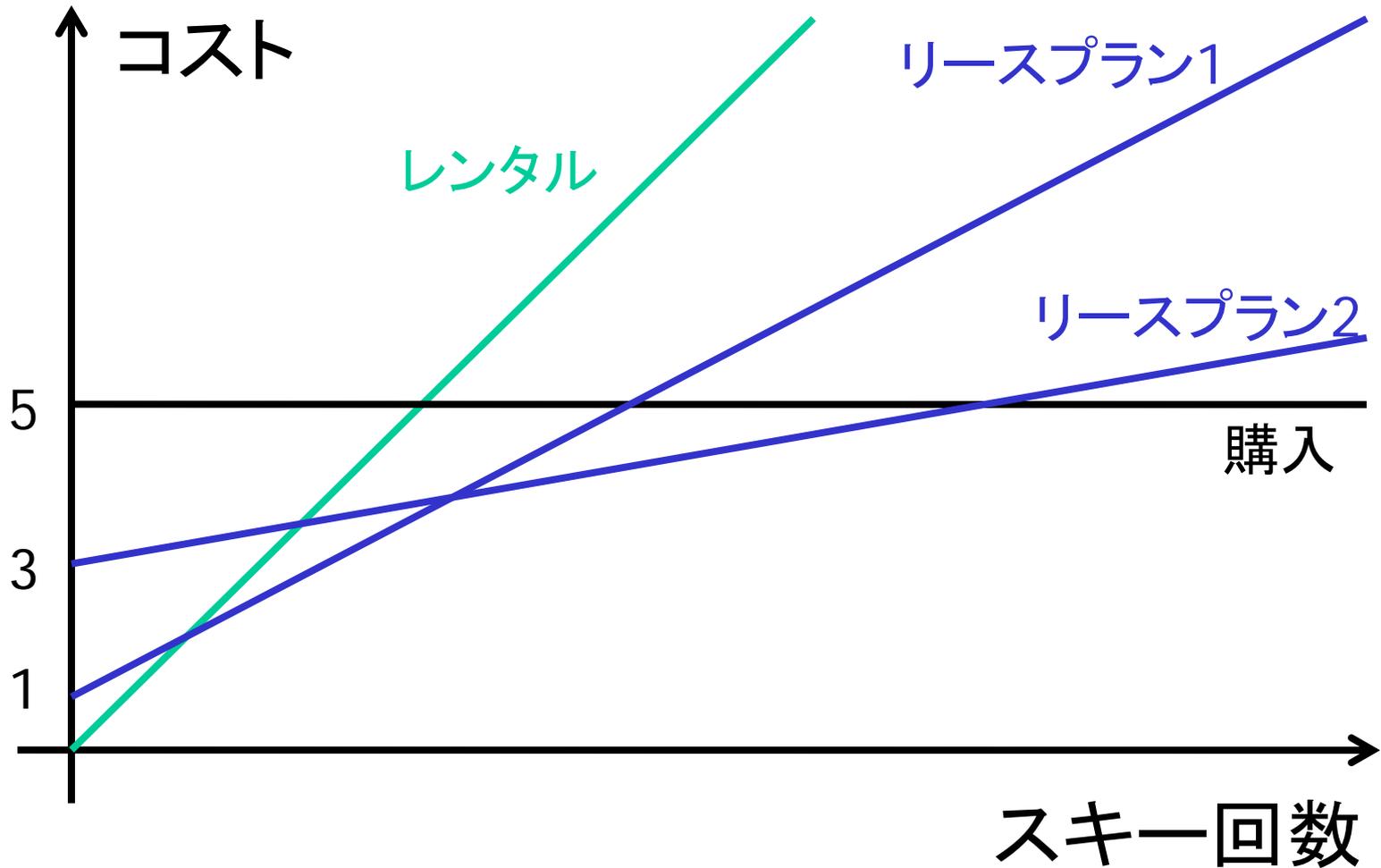
マルチスロープ スキーレンタル問題

- 「購入」・「レンタル」以外に「リース」の選択肢
 - リースとは、初期費用を払って、さらに1回ごとにいくらか払う
 - 例えば初期費用1万円、さらに1回ごとに2000円
 - 複数のリースプランあり
 - リースプランを途中で変更するときは初期費用の差額を払う

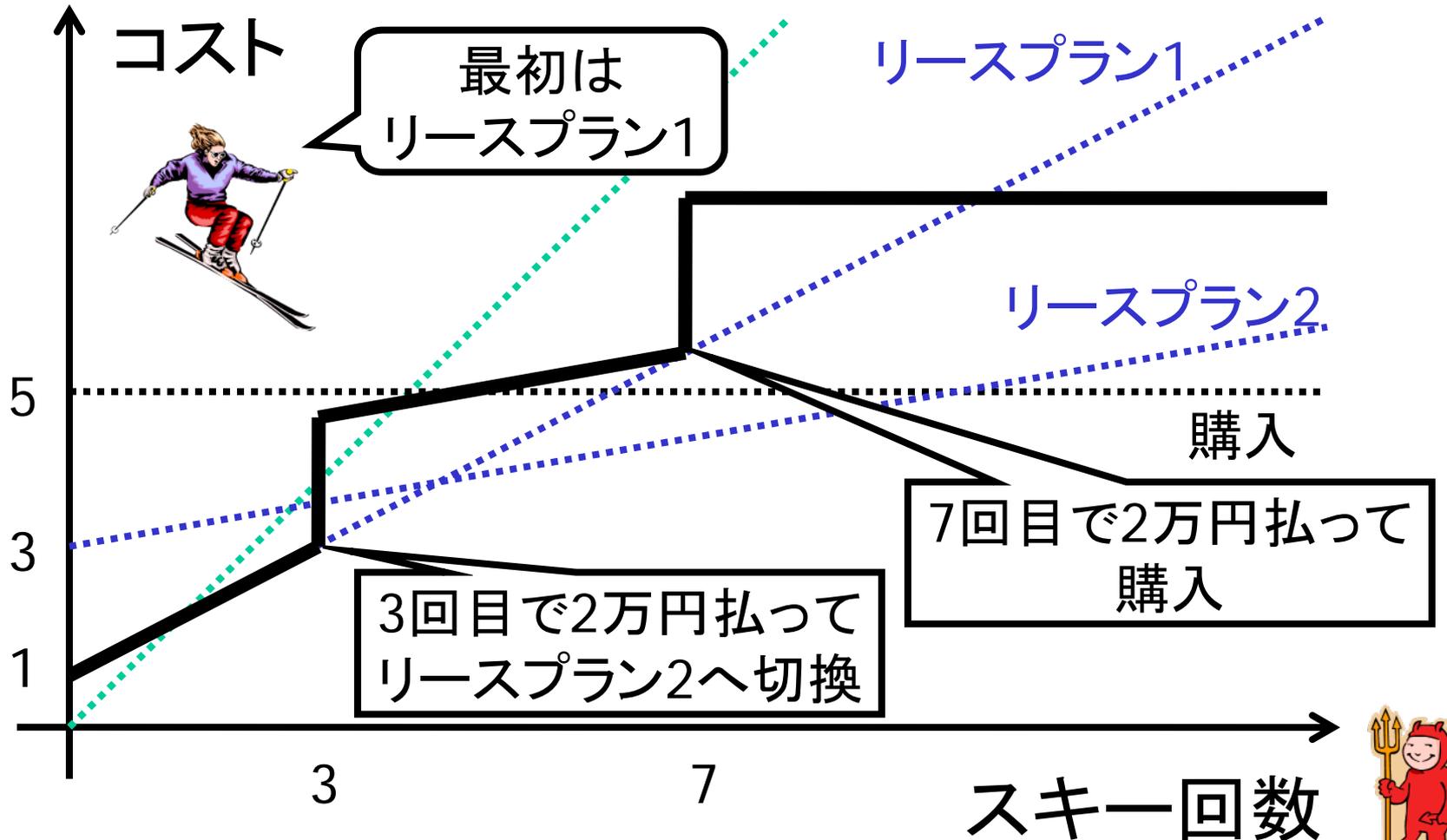
スキー回数とコストの関係： 通常のスキーレンタルの場合



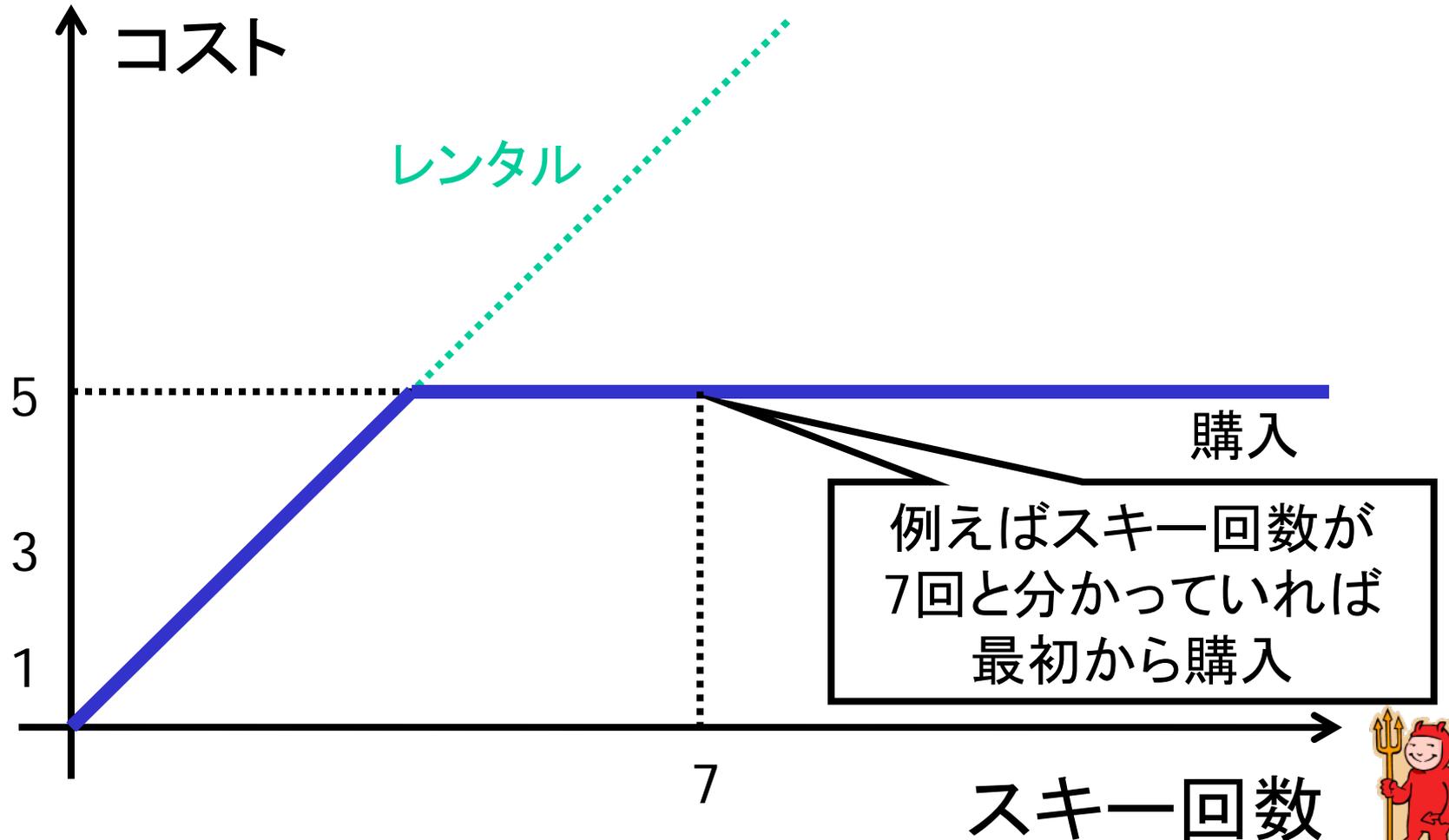
スキー回数とコストの関係： マルチスロープスキーレンタルの場合



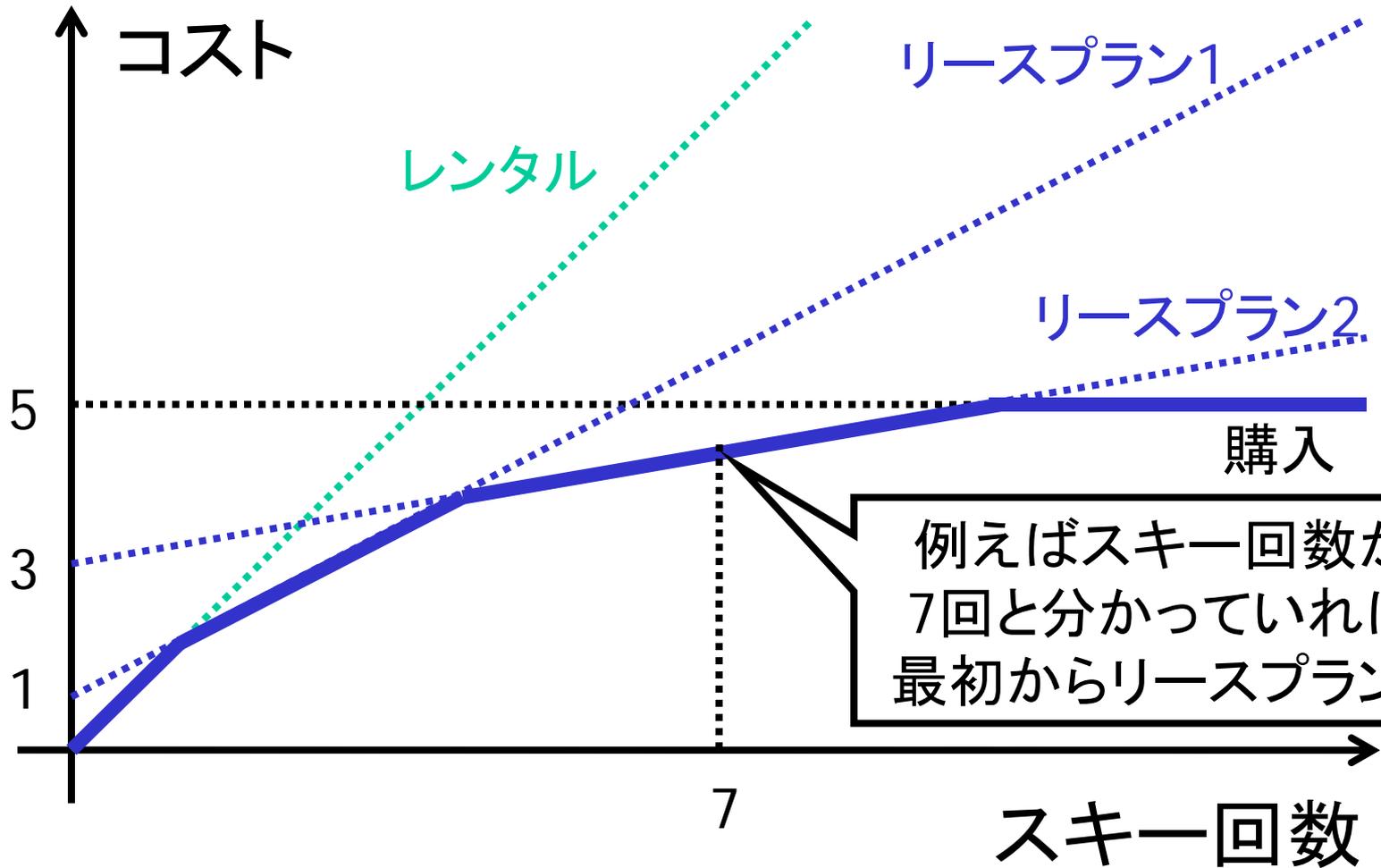
スキーマーの戦略例



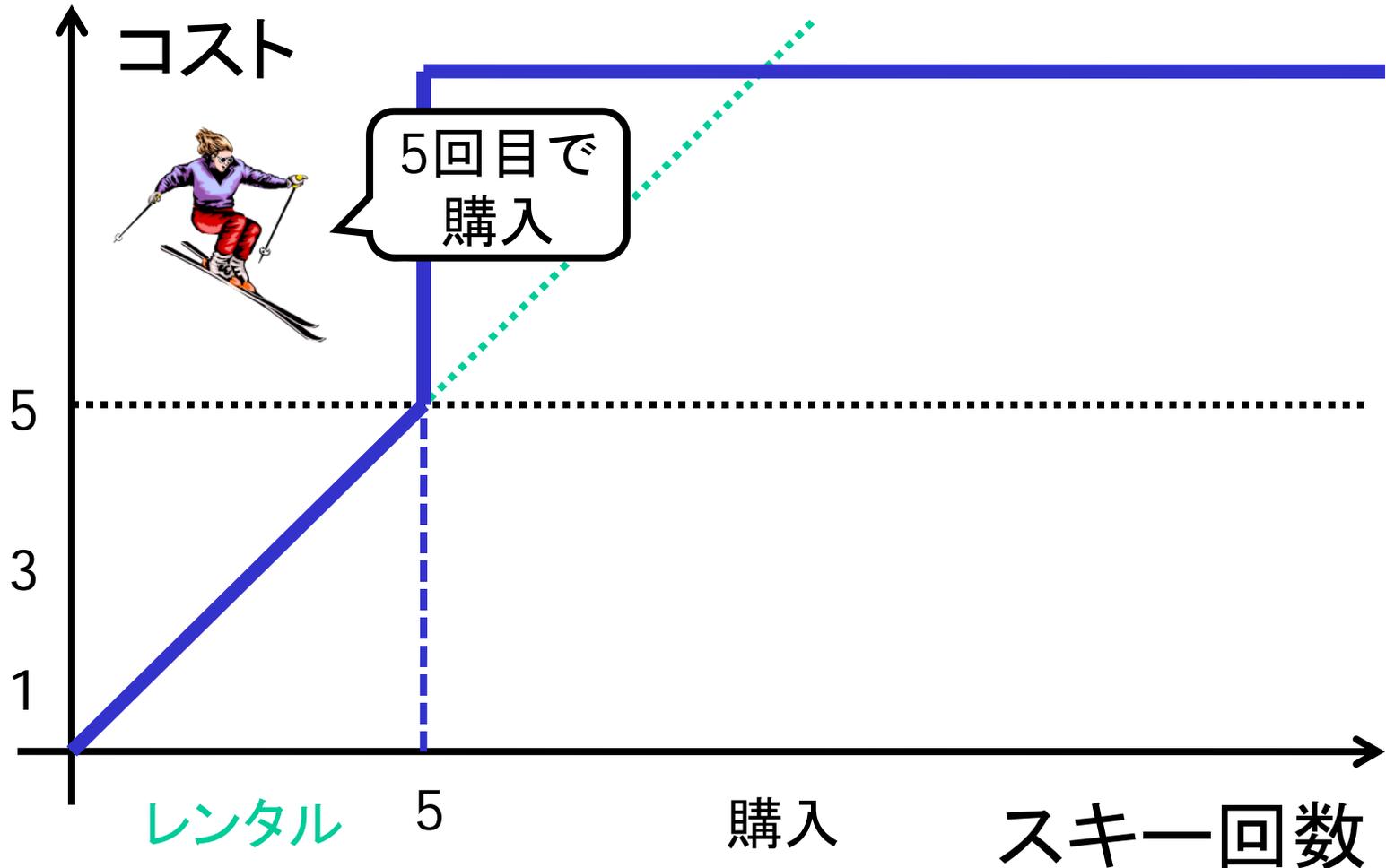
うまくやった場合のコスト： 通常のスキーレンタル



うまくやった場合のコスト： マルチスロープスキーレンタル

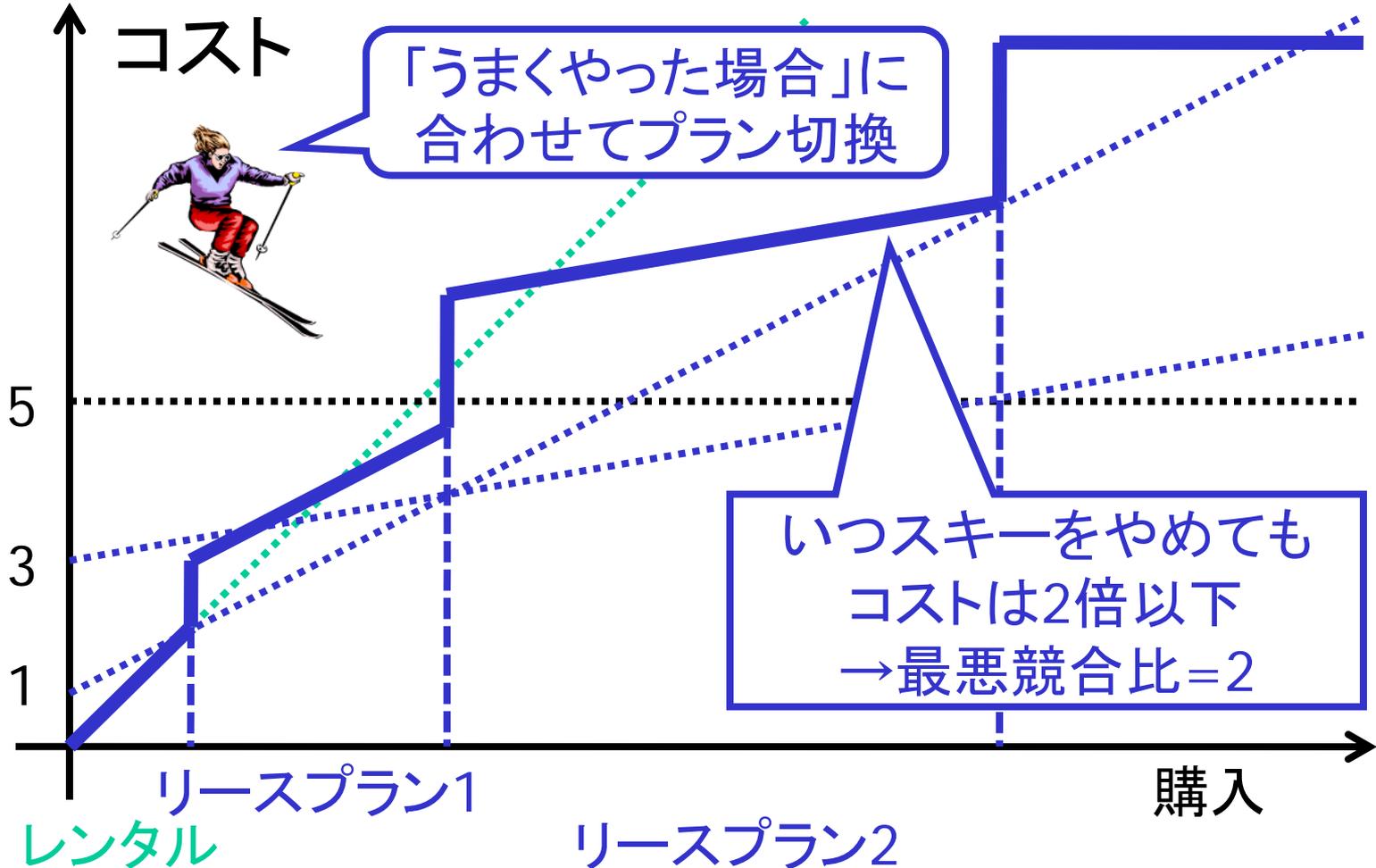


最適戦略： 通常のスキーレンタル



最適戦略:

マルチスロープスキーレンタル



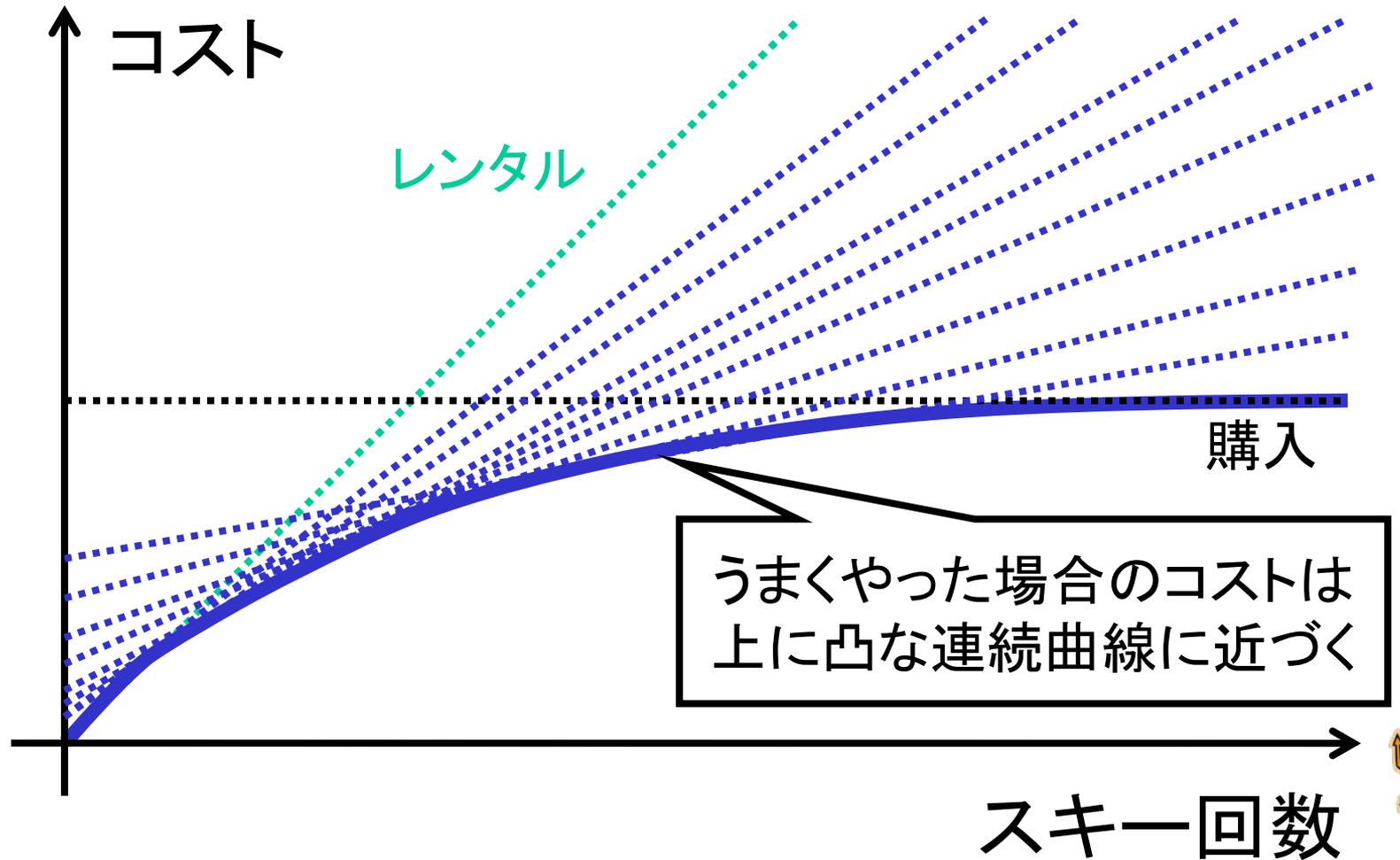
最適戦略の性能比較

(連続版)

モデル	通常のスキーレンタル	マルチスロープ
スキーヤー決定性	2	2
スキーヤー乱択	$\frac{e}{e-1} = 1.58$	$? \leq 1.58$

1.58の戦略は作れる
これより良い戦略が存在するが最悪競合比は陽に表せない

では無限スロープでは？



未解決問題

- マルチスロープ
 - スキーヤー乱択：最悪競合比を陽に表わす
 - スキー回数乱択は？
- 無限スロープ
 - 最悪競合比が2の決定性戦略は存在？
 - 存在するようなスロープの条件は？
 - スキーヤー乱択ではどうか？